分割されたナップサック制約付き最大被覆問題に対する近似アルゴリズム

山下智大 (Tomohiro Yamashita)*　　小野廣隆 (Hirotaka Ono)†

$*$: 九州大学経済学部経済工学科
(Department of Economic Engineering, Kyushu University)
$\dagger$: 九州大学大学院経済学研究院経済工学部門
(Department of Economic Engineering, Kyushu Universuty)

概要

分割されたナップサック制約付き最大被覆問題とは, 与えられた集合 $I = \{1, \ldots, n\}$ の部分集合族 $\mathcal{F} = \{S_j : j \in J\}$ と, 非負の重み w_j, 費用 c_j, 正の整数 $B_i(i = 1, \ldots, l)$, 集合 I の分割 $T_i(i = 1, \ldots, l)$ に対して, 費用 c_j に対する l 本のナップサック制約 $\sum_{j \in T_i} c_j \leq B_i(i = 1, \ldots, l)$ を満たし, X と非空の交わりをもつ S_j の重みの総和を最大にする I の部分集合 X を求めるという問題である. ナップサック制約付き最大被覆問題は NP 困難であるが, pipage rounding を用いたアルゴリズムで性能保証 $\left(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\right)(k = \max\{|S_j| : j \in J\})$ を持つことが知られている. 本論文では, ナップサック制約を分割した場合も, pipage rounding を用いたアルゴリズムで同様の性能保証を持つことを示す.

Abstract

Given a family $\mathcal{F} = \{S_j : j \in J\}$ of subsets of a set $I = \{1, \ldots, n\}$ with associated nonnegative weights w_j and costs c_j and positive integers $B_i(i = 1, \ldots, l)$, and partitioned index sets $T_i(i = 1, \ldots, l)$ of a set I, the maximum coverage problem with partitioned knapsack constrains is to find a subset $X \subseteq I$ with $\sum_{j \in T_i} c_j \leq B_i(i = 1, \ldots, l)$ so as to maximize the total weight of the sets in $\mathcal{F}$ having nonempty intersections with X. The maximum coverage problem with a knapsack constraint is NP-hard, and it is $\left(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\right)$-approximable by the pipage rounding algorithm where k is the maximum size of sets in the instance. In this paper, we show that the maximum coverage problem with partitioned knapsack constrains has the same approximation ratio by the pipage rounding algorithm.

1 はじめに

最大被覆問題とは, 与えられた集合 $I = \{1, \ldots, n\}$ の部分集合族 $\mathcal{F} = \{S_j : j \in J\}$ ($J = \{1, \ldots, m\}$) と, 非負の重み w_j, 正の整数 p に対して, X と非空の交わりをもつ S_j の重みの総和を最大にする I の部分集合 X ($|X| = p$) を求めるという問題であり, 次のように定式化される.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{m} w_j z_j && (1)\\
s.t. \quad & \sum_{i \in S_j} x_i \geq z_j, \quad j \in J && (2)\\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = p && (3)\\
& x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I && (4)\\
& 0 \leq z_j \leq 1, \quad j \in J && (5)
\end{aligned}$$

ナップサック制約付き最大被覆問題とは, 与えられた集合 $I = \{1, \ldots, n\}$ の部分集合族 $\mathcal{F} = \{S_j : j \in J\}$ ($J = 1, \ldots, m$) と, 非負の重み w_j, 費用 c_j, 正の整数 B に対して, ナップサック制約を満たし, X と非空の交わりをもつ S_j の重みの総和を最大にする I の部分集合 X を求めるという問題であり, 次のように定式化される.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{m} w_j z_j && (6)\\
s.t. \quad & \sum_{i \in S_j} x_i \geq z_j, \quad j \in J && (7)\\
& \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq B, && (8)\\
& 0 \leq x_i, z_j \leq 1, \quad i \in I, j \in J && (9)\\
& x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I && (10)
\end{aligned}$$

分割されたナップサック制約付き最大被覆問題とは, 集合 $I = \{1, \ldots, n\}$ の部分集合族 $\mathcal{F} = \{S_j : j \in J\}$ ($J = \{1, \ldots, m\}$) と, 非負の重み w_j, 費用 c_j, 正の整数 $B_i (i = 1, \ldots, l)$, ナップサック制約の分割された添字集合 $T_i (i = 1, \ldots, l)$ が与えられたとき, l 本のナップサック制約を満たし, X と非空の交わりをもつ S_j の重みの総和を最大にする I の部分集合 X を求めるという問題であり, 次のように定式化される (以下では, $L = \{1, \ldots, l\}$ とする).

$$\max \quad \sum_{j=1}^{m} w_j z_j \tag{11}$$

$$s.t. \quad \sum_{i \in S_j} x_i \geq z_j, \quad j \in J \tag{12}$$

$$\sum_{i \in T_j} c_{ij} x_i \leq B_j, \quad j \in L \tag{13}$$

$$0 \leq x_i, z_j \leq 1, \quad i \in I, j \in J \tag{14}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I \tag{15}$$

これは, 次のように定式化することもできる.

$$\max \quad F(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \big(1 - \prod_{i \in S_j} (1 - x_i)\big) \tag{16}$$

$$s.t. \quad \sum_{i \in T_j} c_{ij} x_i \leq B_j, \quad j \in L \tag{17}$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i \in I \tag{18}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I \tag{19}$$

最大被覆問題は NP 困難であり, 貪欲法によるアルゴリズムでは $\big(1 - (1 - \frac{1}{p})^p\big)$-近似可能 [3], pipage rounding によるアルゴリズムでは $k = \max\{|S_j| : j \in J\}$ としたとき $\big(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\big)$-近似可能 [1], $P \neq NP$ の下では $\varepsilon > 0$ に対して $\big(1 - \frac{1}{e} + \varepsilon\big)$-近似不可能であることが知られている [2]. ナップサック制約付き最大被覆問題は, 貪欲法によるアルゴリズムでは $\big(1 - \frac{1}{e}\big)$ 近似可能であり [4], pipage rounding によるアルゴリズムでは $\big(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\big)$-近似可能であることが知られている [1].

本論文の構成は以下の通りである. 2 節で計算の準備を行い, 3 節で分割されたナップサック制約付き最大被覆問題に対するアルゴリズムの記述, 4 節でそのアルゴリズムが $\big(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\big)$ の性能保証を持つことの証明, 5 節で結論を述べる.

2　準備

$0 \leq y_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, k$, $k = \max\{|S_j| : j \in J\}$ に対して, 次の式が成立する.

$$1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - y_i) \geq \big(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\big) \min\Big\{1, \sum_{i=1}^{k} y_i\Big\} \tag{20}$$

証明. $z = \min\Big\{1, \sum_{i=1}^{k} y_i\Big\}$ とすると, 相加平均 · 相乗平均の関係から次の式が成立する.

$$1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - y_i) \geq 1 - (1 - \frac{z}{k})^k \tag{21}$$

また, $0 \leq z = \min\Big\{1, \sum_{i=1}^{k} y_i\Big\} \leq 1$ で $g(z) = 1 - (1 - \frac{z}{k})^k$ は凹関数であるので

$$g(z) \geq \left(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\right) z \tag{22}$$

である. (21), (22) より (20) は示された.
$|S_j| = k'(\leq k)$ である, ある j $(1 \leq j \leq m)$ に対しても, (20) より

$$1 - \prod_{i=1}^{k'}(1 - y_i) \geq \big(1 - (1 - \frac{1}{k'})^{k'}\big) \min\Big\{1, \sum_{i=1}^{k'} y_i\Big\}$$

が成立する. さらに, $x \geq 1$ で $(1 - \dfrac{1}{x})^x$ が単調増加関数であることより

$$1 - \prod_{i=1}^{k'}(1 - y_i) \geq \big(1 - (1 - \frac{1}{k'})^{k'}\big) \min\Big\{1, \sum_{i=1}^{k'} y_i\Big\} \geq \big(1 - (1 - \frac{1}{k})^{k}\big) \min\Big\{1, \sum_{i=1}^{k'} y_i\Big\} \tag{23}$$

であるので, すべての j に対して (23) より

$$1 - \prod_{j \in S_j}(1 - x_i) \geq \big(1 - (1 - \frac{1}{k})^{k}\big) \min\Big\{1, \sum_{i \in S_j} x_i\Big\} \tag{24}$$

が成立する. (24) の両辺に $w_j(> 0)$ を掛けて $j = 1, \ldots, m$ について辺々加えると

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \Big(1 - \prod_{j \in S_j}(1 - x_i)\Big) \geq \big(1 - (1 - \frac{1}{k})^{k}\big) \sum_{j=1}^{m} w_j \min\Big\{1, \sum_{i \in S_j} x_i\Big\} \tag{25}$$

が得られる.

3 アルゴリズム

$IP[I_0, I_1]$ で整数計画問題 (6)-(10) を, $LP[I_0, I_1]$ でその線形緩和 (6)-(9) を表すとする (I_0, I_1 はともに交わりを持たない I の部分集合であり, $i \in I_0$ に対して $x_i = 0$, $i \in I_1$ に対して $x_i = 1$ である).
$LP[I_0, I_1]$ に対する実行可能解 $x^{\mathcal{A}}$ を発見するアルゴリズム $\mathcal{A}$ を記述する (([1], Ageev and Sviridenko, 2004) を再掲する).

アルゴリズム $\mathcal{A}$
フェーズ 1. $LP[I_0, I_1]$ に対する最適解 x^{LP} を見つける.
フェーズ 2. 一連の pipage ステップによって x^{LP} を $x^{\mathcal{A}}$ に変形する.
0. $x^{\mathcal{A}} \leftarrow x^{LP}$ とする.
1. $x^{\mathcal{A}}$ の高々 1 つの要素が小数であるとき, 終了.
2. それ以外のとき, $0 < x^{\mathcal{A}}_{i'} < 1, 0 < x^{\mathcal{A}}_{i''} < 1$ である添字 i',i'' を選ぶ.
$x^{\mathcal{A}}_{i'}(\varepsilon) \leftarrow x^{\mathcal{A}}_{i'} + \varepsilon, x^{\mathcal{A}}_{i''}(\varepsilon) \leftarrow x^{\mathcal{A}}_{i''} - \varepsilon \frac{c_{i'}}{c_{i''}}$ として, $\forall k \neq i', i''$ に対しては $x^{\mathcal{A}}_{k}(\varepsilon) \leftarrow x^{\mathcal{A}}_{k}$ とする.
$F(x(\varepsilon*)) > F(x^{\mathcal{A}})$ となる, 区間 $\Big[-\min\Big\{x_{i'}, (1 - x_{i''})\frac{c_{i''}}{c_{i'}}\Big\}, \min\Big\{1 - x_{i'}, x_{i''}\frac{c_{i''}}{c_{i'}}\Big\}\Big]$ の端点 $\varepsilon*$ を選ぶ.
$x^{\mathcal{A}} \leftarrow x(\epsilon*)$ として 1 に戻る.

· フェーズ 2 は, 各 ε に対して $x(\varepsilon)$ が実行可能であることと $F(x(\varepsilon))$ が凸であることから $F(x(\varepsilon*)) > F(x^{\mathcal{A}})$ となる端点 $\varepsilon*$ が存在することを利用している.
· フェーズ 2 の各 pipage ステップで, アルゴリズム $\mathcal{A}$ は $x^{\mathcal{A}}$ の要素の中で小数であるものの個数を少なくとも 1 つずつ減らしていくので, 最終的に高々 1 つの要素が小数である実行可能解 $x^{\mathcal{A}}$ を出力される.
(25) より, $\forall j \in J \setminus J_1$ に対して

$$\sum_{j \in J \setminus J_1} w_j \Big(1 - \prod_{j \in S_j} (1 - x_i)\Big) \geq \big(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\big) \sum_{j \in J \setminus J_1} w_j \min\Big\{1, \sum_{i \in S_j} x_i\Big\} \tag{26}$$

が成立する. ただし, $J_1 = \{j : S_j \cap I_1 \neq \emptyset\}$ とする.
$\forall j \in J_1$ に対して

$$\sum_{j \in J_1} w_j \Big(1 - \prod_{j \in S_j} (1 - x_i)\Big) = \sum_{j \in J_1} w_j \tag{27}$$

が成立する.
(16) より

$$\begin{aligned} F(x^{LP}) &= \sum_{j \in J} w_j \Big(1 - \prod_{j \in S_j} (1 - x_i^{LP})\Big) \\ &= \sum_{j \in J_1} w_j \Big(1 - \prod_{j \in S_j} (1 - x_i^{LP})\Big) + \sum_{j \in J \setminus J_1} w_j \Big(1 - \prod_{j \in S_j} (1 - x_i^{LP})\Big) \end{aligned} \tag{28}$$

である.
アルゴリズム $\mathcal{A}$ の構成より, $F(x^{\mathcal{A}}) \geq F(x^{LP})$ であることと, (26), (27), (28) より

$$\begin{aligned} F(x^{A}) &\geq F(x^{LP}) \\ &\geq \sum_{j \in J_1} w_j + \big(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\big) \sum_{j \in J \setminus J_1} w_j \min\Big\{1, \sum_{i \in S_j} x_i^{LP}\Big\} \end{aligned} \tag{29}$$

が成立する.

次に, アルゴリズム全体を記述する (([1], Ageev and Sviridenko, 2004) を元に構成する).
入力:整数計画問題の例 (11)-(15)
出力:その例に対する実行可能解 $\bar{x}$

0. $\sum_{i \in I} x_i \leq 4l - 1$ である全ての実行可能解の中で, 目的関数を最大にするものを x^0 とする.
   $\bar{x} \leftarrow x^0$ とする.
1. $|I_1| = 4l$ かつ $\sum_{i \in I_1} \leq B_j,\ \forall j \in J$ である全ての I_1 に対して 2 以降を計算する.
2. $I_0 \leftarrow \emptyset, t \leftarrow 0$ とする.
3. $t = 0$ のとき, アルゴリズム $\mathcal{A}$ を $LP[I_0, I_1]$ の l 本のナップサック制約 (13) それぞれに適用する.
   · 全ての $x_i^{\mathcal{A}}$ が整数のとき, $t \leftarrow 1, \hat{x} \leftarrow x^{\mathcal{A}}$ として終了.
   · l' 個 $(1 \leq l' \leq l)$ の小数解が存在するとき
   $x_i^{\mathcal{A}}$ が小数である添字の集合を L' として, 次の操作をする.
   $\hat{x}_i \leftarrow 0, \forall i \in L'$
   $\forall i \in I \setminus L'$ に対しては, $\hat{x}_i \leftarrow \hat{x}_i^{\mathcal{A}}$ とする.

$I_0 \leftarrow I_0 \cup L'$ とする.
$F(\hat{x}) > F(\bar{x})$ ならば, $\bar{x} \leftarrow \hat{x}$ とする.
3 を繰り返す.

4 性能保証

4.1 アルゴリズムの詳細

与えられた問題例に対する 最適集合を $|X^*|$, それに対応するベクトルを x^* とする. $|X^*| \leq 4l-1$ のとき, このアルゴリズムで最適解が出力されることが分かるので, $|X^*| \geq 4l$ の場合を考える. 一般性を失わず, $X^* = \{1, 2, \dots, |X^*|\}$, $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_{|X^*|}$ であるとできる. $I_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ のときの反復について考える. この反復が q 回 $(4 \leq q \leq n-4)$ で終わるとする. t 回目の反復において, $IP[I_0^t, I_1]$ に対する高々 1 つの要素が小数である実行可能解 $x^t = x^{\mathcal{A}}$ を得るためにアルゴリズム $\mathcal{A}$ が呼び出される $(I_0^t = i_1, \dots, i_{t-1}$ とする). このとき x^t の全ての要素が整数ならば反復を $t = q$ として終了する. x^t の要素に l' 個 $(1 \leq l' \leq l)$ の小数解が残っているとき, 小数解となっているものの添字集合を L' とすると, $\forall i \in I \setminus L'$ に対しては $\hat{x}_i^t \leftarrow x_i^t$, $\forall i \in L'$ に対しては $\hat{x}_i^t \leftarrow 0$ とする. $F(\hat{x}^t) > F(\bar{x})$ であれば $\bar{x} \leftarrow \hat{x}$ と更新する. $I_0^{t+1} = I_0^t \cup L'$ として次の反復へ.

4.2 性能保証の証明

以下では, ([1], Ageev and Sviridenko, 2004) を元に, 分割されたナップサック制約付き最大被覆問題の性能保証が $\bigl(1-(1-\frac{1}{k})^k\bigr)(k = \max\{|S_j| : j \in J\})$ であることを示す.
· $X^* \cap I_0^q = \emptyset$ の場合, x^* は $IP[I_0^q, I_1]$ に対する最適解である. x^q は $LP[I_0^q, I_1]$ の最適解で $\hat{x}^q = x^q$ であることと, (29) より

$$\begin{aligned} F(\hat{x}^q) = F(x^q) &\geq \sum_{j \in J_1} w_j + \bigl(1-(1-\frac{1}{k})^k\bigr) \sum_{j \in J \setminus J_1} w_j \min\Bigl\{1, \sum_{i \in S_j} x_i^q\Bigr\} \\ &\geq \sum_{j \in J_1} w_j + \bigl(1-(1-\frac{1}{k})^k\bigr) \sum_{j \in J \setminus J_1} w_j \min\Bigl\{1, \sum_{i \in S_j} x^*\Bigr\} \\ &\geq \bigl(1-(1-\frac{1}{k})^k\bigr) \sum_{j \in J} w_j \min\Bigl\{1, \sum_{i \in S_j} x^*\Bigr\} \end{aligned}$$

であるので, 性能保証は $\bigl(1-(1-\frac{1}{k})^k\bigr)$ である.
· $X^* \cap I_0^q \neq \emptyset$ の場合, I_0^{s+1} を $I_0^1 = \emptyset, \dots, I_0^q$ の中で初めて X^* と交わりを持つ集合であるとする. 言い換えると, i_s は $i_1, \dots, i_{q-1}$ の中で初めて X^* に出てくる添字であるとする. 以下では

$$F(\hat{x}^q) \geq \cdots \geq F(\hat{x}^s) \geq \bigl(1-(1-\frac{1}{k})^k\bigr) F(x^*)) \tag{30}$$

を証明する.
証明. アルゴリズムの構成より $F(\hat{x}^q) \geq \cdots \geq F(\hat{x}^s)$ は明らか.
関数 F は全ての部分集合 $X \subseteq I$ 上で定義された集合関数 $F(X)$ として扱うことができる. $F(X)$ は劣モジュラ関数であり, 次の性質をもつ.

$$F(X \cup i) - F(X) \geq F(X \cup Y \cup i) - F(X \cup Y), \forall X, Y \subseteq I, i \in I \tag{31}$$

$i \in I, Y \supseteq I_1$ として (31) を用いると, 次の式が成立する.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4l}F(I_1) &= \frac{1}{4l}F(1,2,\dots,4l) \\
&= \frac{1}{4l}\big(F(1,2,\dots,4l) - F(1,2,\dots,4l-1) \\
&\quad + F(1,2,\dots,4l-1) - F(1,2,\dots,4l-2) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + F(1,2) - F(1) \\
&\quad + F(1) - F(\emptyset)\big) \\
&\geq \frac{1}{4l}\big(F(1,2,\dots,4l-1,i) - F(1,2,\dots,4l-1) \\
&\quad + F(1,2,\dots,4l-2,i) - F(1,2,\dots,4l-2) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + F(1,i) - F(1) \\
&\quad + F(i) - F(\emptyset)\big) \\
&\geq F(Y \cup i) - F(Y)
\end{aligned}$$

このように, $\forall Y \supseteq I_1, \forall i \in I$ に対して次の式が成立することが証明された.

$$\frac{1}{4l}F(I_1) \geq F(Y \cup i) - F(Y) \tag{32}$$

$\hat{x}^s$ は x^s の l' 個 $(1 \leq l' \leq l)$ の小数である要素を 0 にしたものであり, x^s において小数解を持つ要素を $x^s_{i_1}, \dots, x^s_{i_{l'}}$ とすると, 次の式が成立する.

$$F(\hat{X}_s \cup i_1 \cup \dots \cup i_{l'}) \geq F(x_s) \tag{33}$$

(26), (32), (33) を用いると次の式が得られる.

$$\begin{aligned}
F(\hat{x}^s) &= F(\hat{X}_s) \\
&= F(\hat{X}_s \cup i_1) - \big(F(\hat{X}_s \cup i_1) - F(\hat{X}_s)\big) \\
&\geq F(\hat{X}_s \cup i_1) - \frac{1}{4l}F(I_1) && (by(32)) \\
&= F(\hat{X}_s \cup i_1 \cup i_2) - \big(F(\hat{X}_s \cup i_1 \cup i_2) - F(\hat{X}_s \cup i_1)\big) - \frac{1}{4l'}F(I_1) \\
&\geq F(\hat{X}_s \cup i_1 \cup i_2) - \frac{2}{4l'}F(I_1) && (by(32)) \\
&\cdots \\
&\geq F(\hat{X}_s \cup i_1 \cdots \cup i_{l'}) - \frac{l'}{4l'}F(I_1) && (by(32)) \\
&= F(\hat{X}_s \cup i_1 \cdots \cup i_{l'}) - \frac{1}{4}F(I_1) \\
&\geq F(x^s) - \frac{1}{4}F(I_1) && (by(33)) \\
&= \sum_{j\in J_1} w_j + \sum_{j\in J\setminus J_1} w_j\big(1 - \prod_{i\in S_j}(1-x_i^s)\big) - \frac{1}{4}\sum_{j\in J_1} w_j \\
&\geq \frac{3}{4}\sum_{j\in J_1} w_j + \big(1-(1-\frac{1}{k})^k\big)\sum_{j\in J\setminus J_1} w_j \min\Big\{1, \sum_{i\in S_j} x_i^{LP}\Big\} && (by(26)) \\
&\geq \big(1-(1-\frac{1}{k})^k\big)\Big(\sum_{j\in J_1} w_j + \sum_{j\in J\setminus J_1} w_j \min\Big\{1, \sum_{i\in S_j} x_i^{LP}\Big\}\Big) && (k \geq 2) \\
&\geq \big(1-(1-\frac{1}{k})^k\big)\Big(\sum_{j\in J_1} w_j + \sum_{j\in J\setminus J_1} w_j \min\Big\{1, \sum_{i\in S_j} x_i^{*}\Big\}\Big) \\
&= \big(1-(1-\frac{1}{k})^k\big)F(x^*)
\end{aligned}$$

以上より, (30) が成立し, $X^* \cap I_0^q \neq \emptyset$ の場合も性能保証 $\big(1-(1-\frac{1}{k})^k\big)$ を持つことが示された.

5 おわりに

本研究では, 分割されたナップサック制約付き最大被覆問題に対する pipage rounding によるアルゴリズムの設計と, そのアルゴリズムが $\big(1-(1-\frac{1}{k})^k\big)(k = \max\{|S_j| : j \in J\})$ の性能保証を持つことを示した. ([2], Feige, 1998) では最大被覆問題は $\varepsilon > 0$ に対して $\big(1-\frac{1}{e}+\varepsilon\big)$-近似不可能であることが示されているので, 本論文で示した分割されたナップサック制約付き最大被覆問題に対する性能保証は有意なものであると言える.

参考文献

[1] A.A. Ageev and M.I. Sviridenko, "Pipage Rounding: A New Method of Constructing Algorithms with Proven Performance Guarantee," Journal of Combinatorial Optimization, 8, pp. 307-328, 2004.

[2] U. Feige, "A threshold of ln n for approximating set cover," J. of ACM., vol. 45, pp. 634-652, 1998.

[3] D.S. Hochbaum, "Approximating covering and packing problems: Set Cover, Vertex Cover, Independent Set, and related problems," in Approximation algorithms for NP-hard problems, D.S.Hochbaum (Ed.), PWS Publishing Company: New York, pp. 94-143, 1997.

[4] S. Khuller, A. Moss, and J. Naor, "The budgeted maximum coverage problem," Information Processing Letters, vol. 70, pp. 39-45, 1999.